Rev. Fitotec. Mex. 15:149-158. 1992

GENERALIZACION DE MODELOS PARA EL ANALISIS DE LA INTERACCION GENOTIPO-AMBIENTE

Roberto Cruz Medina[1]

RESUMEN

El método de Eberhart y Russell, conocido entre los fitomejoradores como el método de los parámetros de estabilidad, es uno de los procedimientos más utilizados en México para el estudio de la interacción genotipo-ambiente. Aunque en su forma original adolece de algunos errores, con los resultados de Mandel, Milliken y Graybill, y Shukla, estos errores pueden corregirse. Por otra parte, aplicando la teoría desarrollada por Gabriel se genera una alternativa para mejorar el ajuste del modelo multiplicativo utilizado. La utilidad de estos resultados se ilustra mediante su aplicación al análisis de los datos de una investigación con frijol (*Phaseolus vulgaris* L.)

PALABRAS CLAVE ADICIONALES

Ajuste bilineal, modelo multiplicativo, mínimos cuadrados, parámetros de estabilidad.

SUMMARY

Eberhart and Russell's approach, known as the Stability Parameters method for plant breeders, is one of the most popular methods in México to explain the genotype environment interaction. This approach has some errors that can be corrected by including the Mandel, Milliken and Graybill, and Shukla's findings. Moreover, with Gabriel's theory a better fit of the multiplicative model used can be obtained. The usefulness of these results is illustrated in this paper analyzing data from a field experiment with beans (*Phaseolus vulgaris* L.).

[1] Profesor del Instituto Tecnológico de Sonora. Apdo. Postal 541. CP 85000. Cd. Obregón, Sonora.

ADDITIONAL INDEX WORDS

Bilinear fit, multiplicative model, least squares method, stability parameters.

INTRODUCCION

En la selección de genotipos se requieren usualmente varias etapas generacionales en las cuales los materiales seleccionados en la etapa anterior se comparan entre sí y con variedades e híbridos comerciales. En ocasiones, esta comparación se realiza en gran escala, en varios sitios y/o durante varios años.

Como los genotipos usualmente difieren en su constitución genética, pueden ser afectados en forma diferente por los factores ambientales (altitud, temperatura, fotoperíodo, etc.) y tecnológicos (i.e., densidad de siembra, métodos de riego, fertilización) lo cual puede dificultar la selección del "mejor" genotipo. Este fenómeno, reconocido desde principios de siglo según anota Hill (1975), se conoce como interacción genotipo-ambiente y es de gran importancia en la selección de variedades.

El método más utilizado para el análisis de la interacción genotipo-ambiente fue proporcionado por Yates y Cochran (1938) cuando, al analizar series de experimentos para evaluar variedades en varios lugares y años, incluyeron un análisis de regresión del rendimiento de cada variedad sobre el rendimiento promedio de cada localidad.

Este útil procedimiento permaneció en el olvido hasta que Finlay y Wilkinson (1963) lo aplicaron al estudiar la estabilidad de varias poblaciones de cebada (*Hordeum vulgare*), definiendo como variedades estables a las poco afectadas por las condiciones ambientales (esto es, a aquéllas con un coeficiente de regresión cercano a cero).

Eberhart y Russell (1966), en su conocido trabajo sobre "Parámetros de Estabilidad", modificaron la definición de Finlay y Wilkinson (1963), considerando como variedades estables a aquéllas con coeficientes de regresión igual a uno y pocas desviaciones de las observaciones reales con respecto a la recta de regresión ajustada. Este procedimiento generó un gran número de controversias, siendo la principal, la presunta violación de las suposiciones de regresión al utilizar como variables independientes a los promedios por ambiente de la variable de respuesta.

Con los resultados de Mandel (1961), generalizados por Milliken y Graybill (1970), se demuestra la validez de considerar como variables independientes a las desviaciones de las medias de un factor y como variables dependientes a los residuales del modelo en un análisis de regresión. Este resultado permaneció desconocido para los fitomejoradores hasta que Shukla (1972) lo aplicó al análisis de la interacción genotipo-ambiente. Sin embargo, es necesario subrayar que para la aplicación correcta del método, primero se debe efectuar la prueba exacta de la interacción genotipo-ambiente en la forma ejemplificada por Cruz (1989), ya que el cuadro presentado por Eberhart y Russell (1966) proporciona algunas pruebas incorrectas.

Como el investigador siempre desea mejorar el ajuste del modelo, resulte éste significativo o no con la prueba exacta, queda el recurso de utilizar el método de mínimos cuadrados descrito por Gabriel (1978) para la obtención de los coeficientes del modelo, o bien, utilizar algunas generalizaciones del modelo multiplicativo en la forma descrita por Gauch (1988) o por Cruz (1992). El presente trabajo fue concebido con el fin de ilustrar el uso de esos resultados, aplicándolos a un conjunto de datos experimentales de una investigación sobre frijol (*Phaseolus vulgaris* L.).

METODOLOGIA

Con una notación similar a la utilizada por Cruz (1989), en la que se trata el caso más frecuente en México, cuando **g** genotipos se estudian en **a** ambientes en un diseño en bloques al azar con **r** repeticiones, un modelo estadístico que puede ser utilizado para representar esta situación experimental es:

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + R_{ij} + G_k + GA_{ik} + e_{ijk} \quad (1)$$

en donde:

$i = 1, 2, \ldots.., a; j = 1, 2, \ldots.., r;$
$k = 1, 2, \ldots.., g$

μ es la media general;

A_i es el efecto del i-ésimo ambiente;

R_{ij} es el efecto del j-ésimo bloque en el i-ésimo ambiente;

G_k es el efecto del k-ésimo genotipo;

GA_{jk} es el efecto de la interacción del genotipo k en el ambiente i;

e_{ijk} es el error asociado a Y_{ijk}, y

Y_{ijk} es la observación del k-ésimo genotipo en el bloque j del ambiente i.

Se supone que $e_{ijk} \sim N(O, \sigma^2_e)$ y que para todo $ijk \doteq i'j'k'$, e_{ijk} y $e_{i'j'k'}$ son independientes.

El cuadro de análisis de varianza y las pruebas de los efectos del modelo cuando los factores ambientes y genotipos se consideran fijos y repeticiones aleatorios los presenta Cruz (1989).

Utilización del modelo multiplicativo

Si la interacción genotipo-ambiente resulta significativa, el siguiente paso es tratar de explicarla; el modelo más utilizado para este propósito es el modelo multiplicativo, en el que la interacción se expresa en la forma:

$$GA_{ik} = B_k A_i + d_{ik} \qquad (2)$$

en donde:

A_i es el efecto del ambiente i,

B_k es el coeficiente de respuesta lineal del genotipo k, y

d_{ik} es la desviación de la respuesta lineal del genotipo k en el ambiente i.

A continuación se describen los métodos disponibles para la estimación de los coeficientes B_k del modelo (2).

Estimación de coeficientes por regresión

Este método, utilizado por Yates y Cochran (1938), es el más conocido para el cálculo de coeficientes del modelo (2). Si se designa por Y_{ik}, $Y_{i.}$, $Y_{.k}$ y $Y_{..}$ a la media del genotipo k en el ambiente i, la media de todos los genotipos en el ambiente i, la media del genotipo k en todos los ambientes y a la media general, respectivamente, los coeficientes de regresión pueden calcularse con la fórmula siguiente:

$$b_k = \frac{\sum_i (Y_{ik} - Y_{i.})(Y_{i.} - Y_{..})}{\sum_i (Y_{i.} - Y_{..})^2} \qquad (3)$$

Mediante estos coeficientes, la suma de cuadrados de la interacción genotipo-ambiente (SCGA) se descompone en dos sumas: la suma de cuadrados de no aditividad debida al término multiplicativo $B_k A_i$ (SCNA) y la suma de cuadrados de las desviaciones de regresión (SCDR).

Las SCNA y SCDR son:

$$SCNA = r \sum_k b_k^2 \sum_i (Y_{i.} - Y_{..})^2 \qquad (4)$$

$$y, \quad SCDR = SCGA - SCNA,$$

con (g-1) y (g-1)(a-2) grados de libertad, respectivamente.

Mandel (1961) demuestra que bajo Ho: $B_1 = B_2 = .. = B_g$

$$F_c = \frac{SCNA/(g-1)}{SCDR/(g-1)(a-2)}$$

tiene distribución F con g-1 y (g-1)(a-2) grados de libertad.

Estimación de coeficientes por mínimos cuadrados

Gabriel (1978) demuestra que el procedimiento de regresión para estimar a los B_k no proporciona los coeficientes de mínimos cuadrados para el ajuste del modelo (1).

Expresando al modelo (1) en función de las medias Y_{ik} e introduciendo la restricción del modelo (2) se obtiene:

$$Y_{ik} = \mu + A_i + G_k + B_k A_i + d_{ik} + e_{ik}, \quad (5)$$

que se puede expresar como:

$$Y_{ik} = \mu + G_k + (1 + B_k)A_i + d_{ik} + e_{ik} \quad (6)$$

en donde

$d_{ik} + e_{ik}$ representan las desviaciones del modelo (obsérvese que al trabajar con las medias estos términos están confundidos).

Gabriel (1978), generalizando un resultado dado por Corsten y Van Eijsbergen (1972), demuestra que los estimadores de mínimos cuadrados del modelo (6) se obtienen por un ajuste al que denomina ajuste lineal-bilineal que consta de dos etapas: en la primera se estima linealmente a μ y G_k, y en la segunda se ajustan los residuales de la primera etapa; el segundo ajuste, llamado ajuste bilineal, se obtiene por medio de los vectores y valores característicos. Sean:

X la matriz de orden axg con elementos $X_{ik} = Y_{ik} - Y_{.k}$ (residuales de las medias de las combinaciones de ambientes por genotipos al ajustar μ y G_k);

λ_j^2 el j-ésimo valor característico de las matrices[2*] X'X o XX' (estas matrices tienen los mismos valores característicos), y

λ_1^2 el mayor valor característico.

[2*] X' matriz traspuesta de X

Los elementos del vector característico $\mathbf{f}_1$ de X'X asociado a λ_1^2 serán proporcionales a los estimadores de $(1 + B_k)$.

Los elementos del vector característico $\mathbf{h}_1$ de XX' asociado a λ_1^2 serán proporcionales a los estimadores de A_i.

Estimación de coeficientes de un modelo general

En el modelo (5), el efecto bilineal $B_k A_i$ incluye al efecto ambiental A_i. Si se elimina esta restricción y se permite que el ambiente sea caracterizado por cualquier grupo de coeficientes se tendrá un modelo generalizado de la forma:

$$Y_{ik} = \mu + A_i + G_k + B_k C_i + d_{ik} + e_{ik} \quad (7)$$

Obsérvese que el modelo (5) es un caso particular de este modelo analizado por Gabriel (1978). El modelo (7) tiene como ventaja un mejor ajuste, y como desventaja la interpretación a veces difícil de los coeficientes C_i que caracterizan la influencia del ambiente en el efecto bilineal.

En forma similar a la descrita anteriormente, se pueden obtener los estimadores de mínimos cuadrados de este modelo; en la primera etapa se ajustan linealmente los factores μ, A_i y G_k y en la segunda etapa se efectúa un ajuste bilineal. Sean:

W la matriz de orden axg con elementos $W_{ik} = Y_{ik} - Y_{i.} - Y_{.k} + Y_{..}$ (residuales de las medias de las combinaciones de ambientes por genotipos al ajustar μ, A_i y G_k),

λ_j^2 los valores característicos de las matrices W'W o W W'.

Los elementos del vector característico $\mathbf{f}_1$ de W'W asociado a λ_1^2 serán proporcionales a los estimadores de los coeficientes B_k y los elementos del vector característico $\mathbf{h}_1$ de WW' asociado a λ_1^2 serán proporcionales a los estimadores de los coeficientes C_i.

Como no existen restricciones para el cálculo de la constante de proporcionalidad de los coeficientes C_i se propone determinarla, con fines de comparación, de forma tal que los estimadores de C_i difieran de los de A_i en una suma de cuadrados mínima.

Johnson y Graybill (1972) presentan tablas del estadístico $u = \lambda_1^2/\Sigma\ \lambda_j^2$ que pueden utilizarse para la prueba del efecto bilineal cuando se supone que ambientes es un factor aleatorio, y que sirve para probar la igualdad de los coeficientes B_k.

Gauch (1988) utiliza una generalización del modelo (7) con varios términos multiplicativos para la interacción. Al modelo así generado lo denomina modelo de efectos principales aditivos e interacción multiplicativa (modelo AMMI), que en la notación utilizada en este artículo es de la forma:

$$Y_{ik} = \mu + A_i + G_k + \sum_{s=1}^{r} B_{ks}C_{is} + d_{ik} \qquad (8)$$

en donde:

r es el número de factores multiplicativos retenidos,

B_{ks} es el coeficiente s del genotipo k, y

C_{is} es el coeficiente s del i-ésimo ambiente.

Los elementos del vector característico $\mathbf{f}_s$ de W'W asociado a λ_s^2 (el valor característico s en orden decreciente) serán proporcionales a los estimadores de los coeficientes B_{ks} y los elementos del vector característico $\mathbf{h}_s$ de WW' asociado a λ_s^2 serán proporcionales a los estimadores de los coeficientes C_{is}.

El modelo (8) no se ejemplificará por la dificultad que usualmente existe en la interpretación de los coeficientes C_{is}.

EJEMPLO NUMERICO

Para ilustrar los métodos descritos se utilizarán los datos de Valenzuela (1985), en donde se comparan ocho variedades de frijol en cuatro fechas de siembra (ambientes). Como la interacción genotipo-ambiente resultó significativa, sólo se tratará con las medias Y_{ik} (Cuadro 1) para el análisis de la interacción (la suma de cuadrados de la interacción es la suma de cuadrados del residual al analizar los datos del Cuadro 1 con un modelo de dos factores de clasificación).

Ajuste del modelo multiplicativo por regresión

Los coeficientes de regresión $\mathbf{b}_k$ se puede calcular con la fórmula 3, o bien, mediante regresiones de las medias de cada variedad con los índices ambientales se pueden obtener los coeficientes presentados por Valenzuela (1985), restándoles la unidad se obtienen los $\mathbf{b}_k$ presentados en el Cuadro 4; con estos valores se efectúa la prueba del modelo multiplicativo ajustado por regresión que se presenta en el Cuadro 2. Nótese que en este cuadro las sumas de cuadrados no se multiplicaron por el número de repeticiones.

Cuadro 1. Rendimientos (ton ha^{-1}) promedios de cada combinación de variedad y ambiente.

Variedades	Ambientes (fechas de siembra) 1	2	3	4	$Y_{.k}$
1	2.484	2.848	3.354	3.764	3.1125
2	2.780	2.788	2.972	3.035	2.8937
3	2.453	3.200	3.300	3.537	3.1225
4	2.720	2.753	3.385	3.690	3.1370
5	2.265	2.512	2.937	3.234	2.7370
6	1.827	2.442	2.092	2.529	2.2225
7	2.673	2.815	2.750	3.020	2.8145
8	3.332	2.917	2.889	3.000	3.0345
$\overline{Y}_{i.}$	2.5667	2.7844	2.9599	3.2261	2.8843

$\Sigma\,(Y_{i.} - Y_{..})^2 =$ 0.23337

Cuadro 2. Prueba de no aditividad.

F.V.	G.L.	S.C.	C.M.	F.C.
Interacción G-A	21	1.5442		
No Aditividad	7	1.0968	0.1566	4.90
Desviaciones de regresión	14	0.4473	0.0319	

$F_c > F_{(\alpha=.05)} = 2.76$

Coeficientes de mínimos cuadrados para el modelo (5)

La matriz X con elementos $X_{ik} = Y_{ik} - Y_{.k}$ es de orden 4x8; su matriz traspuesta de orden 8x4 se presenta en el Cuadro 3.

Utilizando un paquete computacional para cálculos matriciales se pueden obtener:

1). Los valores característicos λ_j^2 de la matriz X'X:

2.9936, 0.3353 y 0.0823 con $\Sigma\lambda_j^2 = 3.4112$

2). El vector característico $\mathbf{f}_1$ de X'X asociado con $\lambda_1^2 = 2.9936$

$\mathbf{f}_1' = (-0.5600, -0.1212, -0.4408, -0.4518, -0.4288, -0.2329, -0.1257, 0.1392)$ con $\Sigma f_i = -2.222$, $\Sigma f_i^2 = 1$

Cuadro 3. Traspuesta de la matriz X .

Genotipos	Ambientes 1	2	3	4
1	-0.6285	-0.2645	0.2415	0.6515
2	-0.1138	-0.1058	0.0783	0.1413
3	-0.6695	0.0775	0.1775	0.4145
4	-0.4170	-0.3840	0.2480	0.5530
5	-0.4720	-0.2250	0.2000	0.4970
6	-0.3955	0.2195	-0.1305	0.3065
7	-0.1425	0.0005	-0.0645	0.2055
8	0.2975	-0.1175	-0.1455	-0.0345

3). El vector característico $\mathbf{h}_1$ de X X' asociado con $\lambda_1^2 = 2.9936$

$\mathbf{h}_1' = (-0.6953, -0.1903, 0.2326, 0.6529)$ con $\Sigma\ \mathbf{h}_i \doteq \mathbf{0}$ y $\Sigma\ \mathbf{h}_i^2 = 1$

Para que los estimadores de $(1 + B_k)$ cumplan con la restricción $(1 + b_k) = g = 8$ se necesita multiplicar a los elementos del vector $\mathbf{f}_1$ por el factor: $8/\Sigma f_i = -3.60036$; restando la unidad al producto se obtienen los coeficientes de mínimos cuadrados que se presentan en el Cuadro 4.

Cuadro 4. Coeficientes B_k del modelo multiplicativo.

Variedad	Regresión	Mínimos cuadrados Model (5)	Modelo (7)
1	1.0008	1.0162	0.9585
2	-0.5677	-0.5637	-0.5141
3	0.5423	0.5870	0.6149
4	0.6220	0.6266	0.5805
5	0.5312	0.5438	0.5197
6	-0.1491	-0.1615	-0.1625
7	-0.5275	-0.5475	-0.5345
8	-1.4521	-1.5011	-1.4623

El valor de la constante para estimar A_i se obtiene de la relación

$\lambda_1 = (-3.60036)$ K, de donde K = -0.48056.

El signo de K se elige para conservar el signo del producto $h_i f_k$. Al multiplicar a los elementos del vector $\mathbf{h}_1$ por esta constante se obtienen los estimadores del Cuadro 5.

Cuadro 5. Estimadores de los efectos ambientales.

Variedad	A_i Regresión	Modelo (5)	C_i Modelo (7)
1	-0.31753	-0.3341	-0.3465
2	-0.09990	-0.0914	-0.0708
3	0.07559	0.1117	0.1628
4	0.34184	0.3137	0.2546

Prueba del efecto bilineal

Suponiendo que ambientes es un factor aleatorio, la estadística de prueba es:

$$u = \frac{\lambda_1^2}{\Sigma \lambda_j^2} = \frac{2.9936}{3.4112} = 0.8775$$

Como el valor crítico para $\alpha = 0.05$ es $\mathbf{u}_\alpha = 0.7811$ [Cuadro 1 de Johnson y Graybill (1972)], y $\mathbf{u} > \mathbf{u}_\alpha$, se acepta la significancia del efecto bilineal. Es decir, al menos uno de los coeficientes B_k es diferente del resto.

Método de mínimos cuadrados para el modelo general (7)

Una vez obtenida la matriz W de orden 4x8, cuyos elementos son $W_{ik} = Y_{ik}-Y_{i.}-Y_{.k} + Y_{..}$ (por ejemplo $W_{11} = Y_{11}-Y_{1.}-Y_{.1}+Y_{..} = -0.3109$), con ayuda de un paquete computacional se puede obtener:

1). El vector característico $\mathbf{f}_1$ de W'W,

$\mathbf{f}_1' = (-0.4460, 0.2392, -0.2861, -0.2701, -0.2418, 0.0756, 0.2487, 0.6804)$

con $\Sigma f_i \doteq \mathbf{0}$, $\Sigma f_i^2 = 1$,

2). El vector característico $\mathbf{h}_1$ de W W',

$\mathbf{h}_i' = (-0.7449, -0.1523, 0.3500, 0.5472)$

con $\Sigma \mathbf{h}_i = \mathbf{0}$, $\Sigma \mathbf{h}_i^2 = 1$, y

3). Los valores característicos: 1.1788, 0.3341, 0.0313, con

$\Sigma \lambda_j^2 = 1.5442.$

Cálculo de los estimadores de los efectos ambientales

Como los estimadores de los efectos ambientales C_i son proporcionales a los elementos del vector $\mathbf{h}_1$, la constante de proporcionalidad K propuesta es aquella que minimiza la cantidad $\Sigma(\mathbf{I}_i - \mathbf{h}_i)^2$, y que se obtiene con las fórmulas clásicas del método de mínimos cuadrados, esto es:

$$K = \frac{\Sigma \mathbf{I}_i \mathbf{h}_i}{\Sigma \mathbf{h}_i^2} = 0.46529,$$

donde $\mathbf{I}_i = Y_{i.}-Y_{..}$ representan los conocidos índices ambientales o estimadores de los efectos ambientales en el modelo aditivo.

Multiplicando a los elementos del vector $\mathbf{h}_1$ por la constante K se obtienen los estimadores de C_i que se presentan en el Cuadro 5; los estimadores de B_k, que se presentan en el Cuadro 4, se calculan multiplicando a los elementos del vector $-\mathbf{f}_1$ por el recíproco de K ($-\mathbf{f}_1$ es también un vector característico, el signo de este vector se elige de acuerdo con la descomposición singular de la matriz que corresponderá a aquél vector cuyos componentes coincidan en signo con los de B_k).

Prueba del efecto bilineal

La estadística de prueba es:

$$u = \frac{\lambda_1^2}{\Sigma \lambda_j^2} = \frac{1.1788}{1.5442} = 0.7633$$

El valor crítico para $\alpha = 0.05$ es $\mathbf{u}\alpha = 0.7811$. Como $\mathbf{u} < \mathbf{u}\alpha$ no se rechaza la hipótesis nula que postula la igualdad de los coeficientes del efecto bilineal en el modelo general.

DISCUSION

La principal ventaja del método de regresión para la estimación de los coeficientes del modelo multiplicativo es la disponibilidad de una prueba exacta de la no aditividad del modelo, además de que por medio de pruebas de t o F se puede identificar qué coeficientes son diferentes de cero. En el ejemplo estudiado, el efecto bilineal o de no aditividad explicó el 71% de la suma de cuadrados de la interacción genotipo-ambiente.

El ajuste por mínimos cuadrados para el modelo (5) requiere de un paquete computacional para la obtención de los vectores y valores característicos; como λ_1^2 representa la suma de cuadrados de ambientes más el efecto bilineal, la suma de cuadrados extra debido al efecto bilineal será λ_1^2 - SCA/r.

El ajuste del modelo general, además de requerir el uso de un paquete computacional, tiene la desventaja de introducir un mayor número de parámetros que en algunas ocasiones pueden ser de difícil interpretación (estimadores de C_i). En este caso λ_1^2 representa la suma de cuadrados del efecto bilineal; de los modelos estudiados éste será siempre el de mejor ajuste.

En los modelos (5) y (7) no se dispone de pruebas exactas para identificar qué coeficientes son diferentes de cero; la recomendación usual para resolver este problema es la aplicación de los métodos descritos a subconjuntos de las variedades en estudio.

En el presente ejemplo, las estimaciones de B_k y A_i difieren poco con los tres métodos, el modelo general puede desecharse por su falta de significancia a un α = 0.05 y por introducir 4 parámetros adicionales (C_i), cuyos estimadores difieren poco de los de A_i.

Por estas consideraciones, para este ejemplo se recomiendan los coeficientes obtenidos por el método de regresión, ya que el modelo (5) sólo explica el 2.7% más de la SCGA y el modelo (7) el 7.4 % más. Se recalca, sin embargo, que los modelos (5) y (7) ajustados por mínimos cuadrados representan alternativas para la explicación de la interacción genotipo-ambiente.

BIBLIOGRAFIA

Corsten, L.C.A. and A. C. Van Eijsbergen. 1972. Multiplicative effects in two way analysis of variance. Statist. Neerlandica 26: 61-68.

Cruz M., R. 1989. Un ejemplo de la prueba exacta de los parámetros de estabilidad de Eberhart y Russell. Rev. Fitotec. Mex. 12:147-155.

__________. 1992. More about the multiplicative model for the analysis of genotype-environment interaction. Heredity 68:153-160.

Eberhart, S.A. and W.A. Russell. 1966. Stability parameters for comparing varieties. Crop Sci. 6:36-40.

Finlay, K. W. and G.N. Wilkinson. 1963. The analysis of adaptation in a plant breeding programme. Aust. J. Agric. Res. 14:742-754.

Gabriel, K. R. 1978. Least squares approximation of matrices by additive and multiplicative models. J. Royal Stat .Soc. (B) 2:186-196.

Gauch, H. G. 1988. Model selection and validation for yield trials with interaction. Biometrics 44:705-715.

Hill, J. 1975. Genotype-environment interactions a challenge for plant breeding. J. Agric. Sci. 85:447-493.

Johnson, D. E. and F.A. Graybill. 1972. An analysis of a two-way model with interaction and no replication. J. Amer. Stat. Assoc. 67 (340):862-869.

Mandel, J. 1961. Non additivity in two-way analysis of variance. J. Amer. Stat. Assoc. 56:878-888.

Milliken, G. A. and F.A. Graybill. 1970. Extensions of the general linear hypothesis model. J. Amer. Stat. Assoc. 65: 797-807.

Shukla, G. K. 1972. Some statistical aspects of partitioning genotype environmental components of variability. Heredity 29 (2): 237-245.

Valenzuela, L. J. 1985. Parámetros de estabilidad para el rendimiento de variedades de frijol en cuatro fechas de siembra. Agric. Téc. Méx. Vol. 11 (2): 185-200.

Yates, F. and W. G. Cochran. 1938. The analysis of groups of experiments. J. Agric. Sci. 23: 556-580.